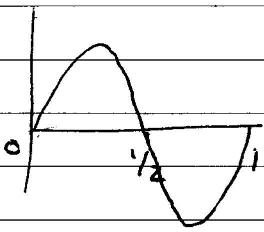
Naam: Kasper Duivenvoorden	Studentnummer: 1455729.	Bladnr.: 1
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

1a $\|T\| = \sup \frac{\|Tf\|}{\|f\|}$

Stel T is begrensd. $\Rightarrow \|T\|$ ~~≤~~.

Bekijk de functie



f_0

$f_N = \sin(2\pi x \cdot 2^N)$. $\quad f'_N = 2^{N+1}\pi \sin(2^{N}$

$f_N \in C'([0,1] \quad \forall N < \infty$

$\|f_N\| = 1 \quad \forall N.$ $\quad f'_N(0{,}5) = Tf_N = 2^{N+1}\pi$

Dus als $\|T\|$ begrensd is door bv 2^M $\quad (\|T\| = 2^M.)$
dan geldt $\frac{\|Tf_m\|}{\|f_m\|} > \|T\| \Rightarrow$ tegenspraak

b. $\|f\|_1 \geq 0$ is triviaal.
(omdat $|f(x)| \geq 0$ en $\left|\frac{df}{dx}(x)\right| \geq 0$.

als $f=0$ dan $\sup|fx| = 0$.
en $f'=0$ dus $\sup|f'x| = 0$ $\Big\} \|f\|_1 = 0$

Als $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \sup|f(x)| = 0$ $\quad$ omdat $\sup|f'x| \geq$

maar omdat $|f(x)| \geq 0$ moet gelden
$|f(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$
$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$
$\Rightarrow f = 0.$

$\|\lambda f\|_1 =$
$\sup|\lambda f(x)| + \sup|(\lambda f)'(x)|$
$= \sup|\lambda||f(x)| + \sup|\lambda||f'x|$
$= |\lambda| \sup|fx| + |\lambda| \sup|f'x| = |\lambda| \, \|f\|_1$

$$\|f+g\|_1 = \sup|(f+g)(x)| + \sup|(f+g)'(x)|.$$

$$= \sup|fx+gx| + \sup|f'x+g'x|$$
$$\le \sup(|fx|+|gx|) + \sup(|f'x|+|g'x|)$$
$$\le \sup|fx| + \sup|gx| + \sup|f'x| + \sup|g'x|$$
$$= \|f\|_1 + \|g\|_1$$

c) $\|T\| = \sup\limits_{f\in C^1([0,1])} \dfrac{\|Tf\|}{\|f\|_1}$

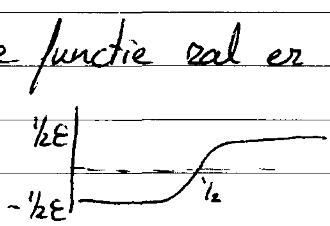
$$\cancel{= \sup_{\|f\|_1\le 1} \|Tf\|}$$

$$\|f\|_1 \le 1 \Rightarrow \sup|f'(x)| \le 1 \Rightarrow f'(\tfrac12) \le 1$$
$$\Rightarrow \|Tf\| \le 1$$

$\Rightarrow \|T\| \le 1$ (Dus begrensd.

Dat $\|T\| = 1$ is lastig te bewijzen. Ik probeer het alsvolgt.
Stel $\|T\|<1$ zodat $\|T\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$. ik zoek een functie met $\sup f(x) = \frac12\varepsilon$ en $\sup f'(x) = f'(1/2)$. Als deze bestaat dan geldt. $\|Tf\|/\|f\| = \frac{p}{p+\frac12\varepsilon}$ met $p = f'(1/2)$.
als bovendien geldt dat $p = 1$ dan hebb ik een tegenv

De functie zal er alsvolgt uit moeten zien



Een functie die hieraan voldoet is

$$\tfrac12\varepsilon \sin \tfrac{2}{\varepsilon}(x-\tfrac12) = f(x).$$

Deze voldoet aan $|f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ en $f'(\frac12) = 1 \ge |f'(x)|$.

$\Rightarrow \|T\| = 1.$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen: ②
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

2. a ~~$\|T\| = \sup \frac{\|YAx\|}{\|x\|}$~~

~~$= \sup\{\|YAx\| \mid \|x\| = 1\}$.~~

~~verder geldt $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$~~

$\|YA\| = \sup \frac{\|YAx\|}{\|x\|}$

$\|Y\| = \sup \frac{\|YAx\|}{\|Ax\|}$.

$$\|T\| = \sup \frac{\|YA\|}{\|Y\|}$$

$$= \sup\{\|YA\| \mid \|Y\| = 1\}.$$

$$= \sup\left\{\sup\left\{\frac{\|YAx\|}{\|x\|}\right\} \mid \|Y\| = 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sup\{\|YAx\| \mid \|x\| = 1\}. \mid \|Y\| = 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sup\left\{\frac{\|Y(Ax)\|}{\|(Ax)\|} \cdot \|Ax\| \mid \|x\| = 1\right\} \mid \|Y\| = 1\right\}.$$

$$\leq \sup\{\|Y\| \cdot \|Ax\| \mid \|Y\| = 1, \|x\| = 1\}.$$

$$= \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

$$= \|A\| \qquad \Rightarrow \qquad \|T\| \leq \|A\|.$$

b) ~~Door 4 a) geldt $\|T\| \leq 1$~~

$$\|T\| = \sup_Y \{ \|BYA\| \mid \|Y\| = 1 \}$$

$$= \cancel{\sup \{ \frac{\|BYA\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \mid \|A\| = 1, \|Y\| = 1 \}}$$

$$= \sup_Y \{ \frac{\|BYA\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \mid \|Y\| = 1 \}$$

$$= \|A\| \cdot \sup_Y \{ \frac{\|BYA\|}{\|A\|} \mid \|Y\| = 1 \}$$

$$= \|A\| \sup_Y \{ \|BY\| \mid \|Y\| = 1 \}$$

$\Rightarrow$

$$\sup_B \|T\| = \|A\| \cdot \sup_B \{ \sup_Y \{ \frac{\|BY\|}{\|B\|} \|B\| \mid \|Y\| = 1 \} \}$$

$$= \cancel{\|A\| \|B\|}$$

$$= \|A\| \sup_Y \{ \sup_B \{ \frac{\|BY\|}{\|B\|} \|B\| \} \mid \|Y\| = 1 \}$$

$$= \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sup \{ \|Y\| \mid \|Y\| = 1 \}$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

$\Rightarrow \|T\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Naam:
Adres:
Postcode en Woonplaats:

Studentnummer:
Studierichting:
Jaar van eerste inschrijving:

Bladnr.: 3
Tentamen:
Datum:
Naam docent:

3 Er geldt $\|\Lambda\| \geq \|\lambda\|$.

omdat $\|\Lambda\| = \sup_{x\in H}\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in K}\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} = \sup_{x\in K}\frac{\|\lambda x\|}{\|x\|}$
$= \|\lambda\|$.

~~Stel nu dat $\|\Lambda\| > \|\lambda\|$.~~

Bekijk $\sup_{x\in H\setminus K}\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} = \sup_{x\in H\setminus K}\frac{\|\lambda y\|}{\|x\|} \leq \sup \frac{\|\lambda y\|}{\|y\|} = \|\lambda\|$

$\|x\| = \|y+z\|$
$= \sqrt{\langle y+z, y+z\rangle}$
$= \sqrt{\langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle y,z\rangle}$
$= \sqrt{\|y\|^2+\|z\|^2}$ omdat $\langle y,z\rangle = 0$

$\Longrightarrow \|x\| \geq \|y\|$

Dus $\|\Lambda\| \geq \|\lambda\| \quad \forall x \in H$
$\|\Lambda\| \leq \|\lambda\| \quad \forall x \in H\setminus K$. en $\|\Lambda\| = \|\lambda\| \ \forall x$
$\Rightarrow \|\Lambda\| = \|\lambda\|$.

$\Updownarrow$

$\sup_{x\in K}\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} = \sup_{y\in K}\frac{\|\lambda y\|}{\|y\|} = \|\lambda\|$

6 ~~Stel $\Lambda(x) > \lambda(y)$ voor een bepaalde $x = y+z \in H$.~~

$\Lambda(x) = \Lambda(y+z) = \Lambda(y) + \Lambda(z)$.
Dus bekijk $\Lambda(z) \neq 0$
~~① $\Lambda(z_0) < 0$ voor een bepaalde z_0~~
② $|\Lambda(z_0)| > 0$ voor een bepaalde z_0.

Bekijk $x_n = y_n + z_0$ zdd $y_n \to 0$

in geval van ②: $\sup\frac{\|\Lambda x_n\|}{\|x_n\|} > \sup\frac{\|\lambda y_n\|}{\|x_n\|} = \sup\frac{\|\lambda y_n\|}{\|y_n\|} = \|\lambda\|$

$\Rightarrow \|\Lambda\| > \|\lambda\|$ kan niet.

in geval van ① $\Longrightarrow \Lambda(z) = 0$.
$\Longrightarrow \Lambda(x) = \Lambda(y) = \lambda(y)$.

c. Wy gingen uit van een Hilbert ruimte.
H-B alleen van een genormeerde lineaire ruimte.
Het gevolg is dat Λ in ons geval uniek is bepaald.
door $\Lambda(x) = \lambda(y)$. ~ gesloten!

4 a. $Tf(x) = \lambda f(x)$.

$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$. vul 0 in. $0 = \lambda f(0)$

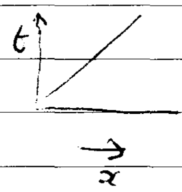
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(\lambda f(x))$.

$\Rightarrow f(x) = \lambda f'(x)$ b.o.
Deze diff vergelijking heeft als oplossing

$f(x) = Ce^{\frac{1}{\lambda}x} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
$\Rightarrow T$ heeft geen eigenwaardes.

b moet laten zien dat $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

$\int_0^1 \int_0^x f(t)\,dt \cdot g(x)\,dx = \int_0^1\int_0^x f(t)g(x)\,dt\,dx$.



$= \int_0^1\int_x^1 f(t)\,g(x)\,dx\,dt$.

$= \int_0^1 f(t)\left(\int_x^1 g(x)\,dx\right)\,dt$

$= \langle x, T^*y\rangle$. $\triangledown$

$T^* f(x) = \lambda f(x)$.

$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^x f(x)\,dx = \lambda f(x)$ $f(0) = \lambda^{-1}\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{N}{\lambda}$

$\Rightarrow -f(x) = \lambda f'(x)$. $\Rightarrow f = ce^{-\lambda^{-1}x}$ $\Rightarrow c = \frac{N}{\lambda}$

$\Rightarrow f = \frac{N}{\lambda}e^{-\lambda^{-1}x}$.

$\Rightarrow T^*$ heeft vele eigenwaarde
namelijk ~~voor~~ alle $x \in \{\mathbb{R} - \{0\}\}$
(of $x \in \{\mathbb{Q} - \{0\}\}$)

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

c.

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t).\, I_x(t)\, dt = \int_0^1 |f(t).\, I_x(t)|\, dt$$

omdat $f(t) \in [0,1]$ dus > 0

$$= \| f(t).\, I_x \|_1$$

$$\leq \| f(t)\|_2 \, \| I_x \|_2.$$

~~ongelijkheid van~~

$$= \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2} . \left(\int_0^1 I_x^2(t)\, dt\right)^{1/2}.$$

$$= \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2} . \left(\int_0^x 1^2 . dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2} . \sqrt{x}.$$

dus $\|f\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt$ (1).

Bekijk. $\frac{\|Tf\|_2^2}{\|f\|_2^2} = \frac{\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx}{\|f\|_2^2}$

$$\leq \frac{\int_0^1 x \|f\|_2^2 dx}{\|f\|_2^2} = \int_0^1 x\, dx = 1/2.$$

$$\Rightarrow \sup \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} = \|T\| \leq \sqrt{1/2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$(\lambda - T) f(x) = g(x).$

~~$\|T + (1-\tfrac12\sqrt2)\| \leq \|T\|$~~

$\|T + (1-\lambda) I\| \leq \|T\| + |1-\lambda| < 1$ als $\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $I - T - (1-\lambda)I$ is inverteerbaar. (st. 5.5).

$\Rightarrow (\lambda I - T)$ inverteerbaar

$\Rightarrow g(x) = (\lambda I - T)^{-1} f(x)$

$\Longrightarrow$ ~~unieke~~ $g(x)$ uniek.

d) $\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx\ T^*y\rangle$
$= \langle x, T^*Ty\rangle.$
$\Rightarrow$ ~~T^*~~ H^*H is altijd hermitisch.

(Trouwens, ik vind het jammer dat er over geadjungeerdhe wordt gesproken en niet hermitisch.
Tijdens het college en in het boek is namelijk alleen sprake geweest van ~~geadj~~ hermitische operatoren en niet van geadjungeerde operatoren.

$\lambda x = T^*Tx.$

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \langle x,y\rangle\bar{\lambda}$$

$\Rightarrow \lambda$ is reeel.

$\lambda x = Kx.$

$$\lambda f = \int_x^1\int_0^u f(t)\,dt\,du.$$

$$\lambda f = \int_0^1\int_0^u f(t)\,dt\,du - \int_0^x\int_0^u f(t)\,dt\,du.$$

$$\lambda f' = -\int_0^x f(t)\,dt. \qquad f(0) = \int_0^1\int_0^u f(t)\,dt\,du. \geq 0.$$

$$\lambda f'' = -f \qquad f'(0) = 0.$$

$\Rightarrow f = a_1\cos\lambda^{-\frac{1}{2}}x + a_2\sin\lambda^{-\frac{1}{2}}x.$ als $\lambda > 0$

of/wel ~~$f = e^{x}$~~

~~als~~ $f = C_1 e^{x/\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x/\sqrt{-\lambda}}$ als $\lambda < 0$

maar $f'(0) = 0$
dus als $\lambda < 0$ dan $f = 0 \Rightarrow$ geen eigenwaa

e) ik gok $\|T\| = \frac{2}{\pi}$. omdat $\|T^*T\| = \|T^*\|\,\|T\|$ ①
en $\|T^*\| = \|T\|$. ②.

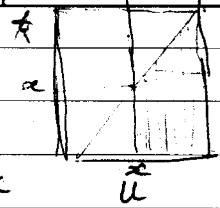
$\Rightarrow \exists\ f$ met $Kf = \frac{4}{\pi^2}f.$
$T^*Tf = \frac{4}{\pi^2}f.$

$-Tf = \frac{4}{\pi^2}f'$
$\Rightarrow f = a_1\cos.\frac{\pi}{2}x$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: Naam docent:

5

$$T^*T\cancel{f} = \int_x^1\int_0^u f(t)\,dt\,du.$$



$$= \int_0^1\int_u^1 f(t)\,du\,dt - \int_0^x\int_u^x f(t)\,du\,dt.$$

$$= (-$$

$$\left(K - \frac{4}{\pi^2} I\right)$$ niet inverteerbaar

Neem $f = a\cos\frac{\pi}{2}x.$ ~~met $a = f(0) = \int_0^1\int_0^u f(t)\,dt$~~

$$\|f\|_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\|Tf\| = \left\| a\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right\|.$$

$$= a\frac{1}{\sqrt{2}}\,2/\pi$$

$$\frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \|T\| \geq \frac{2}{\pi}$$

als $\|T\| > \frac{2}{\pi}$ namelijk ω

dan zou gelden. $\exists f$ met $\|Tf\| \geq \frac{2}{\pi}\|f\|.$

$$Kf = \frac{4}{\pi^2}f.$$

$$T^*Tf = \frac{4}{\pi^2}f. = \rho Tf$$

ρ eigenwaarde van T^*